# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΜΑΘΗΜΑ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:00

φροντιστήρια
πουκαμισάς
Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Σχολικό Βιβλίο Σελ.186

**Α2.** Σχολικό Βιβλίο Σελ.142

**Α3.** Σχολικό Βιβλίο Σελ.161

**Α4.** **α) Σ**

**β) Σ**

**γ) Σ**

**δ) Λ**

**ε) Λ**

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1** Ισχύει ότι $D_h = D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in [0,+\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty,1]\right\} = [0,1]$

Ακόμα $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

**Β2** Έχουμε $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$

$h'(x) = 2(x-1) < 0, x \in [0,1)$ και η h συνεχής στο: $[0,1]$

$h \searrow$ στο $[0,1]$ άρα η h είναι 1-1

Ακόμα η h συνεχής στο $[0,1]$ και $h \searrow$ άρα το σύνολο τιμών της h προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=1 \\ h(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(D_h) = [0,1] = D_{h^{-1}}$$

Έχουμε λοιπόν: $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} |x-1| = \sqrt{y} \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} -x+1 = \sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y} \overset{h^{-1}(y)=x}{\Leftrightarrow} h^{-1}(y) = 1-\sqrt{y} \overset{y\to x}{\Leftrightarrow} h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$ και $D_{h^{-1}} = [0,1]$.

**Β3** $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο 1, έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Επομένως η φ είναι συνεχής στο 1.

Ακόμα $\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=1\\ \varphi(1)&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(0)\neq\varphi(1)$

Τελικά ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$ άρα

υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta$ με $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

ii. Έχουμε $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\underset{\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\eta\mu\alpha\nearrow}{\Rightarrow}}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$

Άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ.1.** $f'(x)=\begin{cases}-2 & , x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$

Από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής έχουμε:

$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 & , x<-1\\ x^3-x+c_2 & , x>-1\end{cases}$ και επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 & , x<-1\\ c_3 & , x=-1\\ x^3-x+c_2 & , x>-1\end{cases}$$

Η $f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, συνεπώς $f(0)=0\Leftrightarrow c_2=0$

Η $f$ είναι συνεχής στο $-1$, συνεπώς $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow -2(-1)+c_1=(-1)^3-(-1)\Leftrightarrow c_1+2=0\Leftrightarrow c_1=-2$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=0=c_3$$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}-2x-2 \ , & x\leq-1\\ x^3-x \ , & x>-1\end{cases}$

**Γ.2.** Για $x>-1$, $f(x)=x^3-x$

Η εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(x)=3x^2-1$ συνεπώς $f'(x_0)=3{x_0}^2-1$

Άρα $(\varepsilon): y-({x_0}^3-x_0)=(3{x_0}^2-1)(x-x_0) \Leftrightarrow y-{x_0}^3+x_0=(3{x_0}^2-1)(x-x_0)$

Το $\mathrm{B}(0,-2)\in(\varepsilon)$ άρα οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωση $(\varepsilon)$

$$-2-{x_0}^3+x_0=(3{x_0}^2-1)(0-x_0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-{x_0}^3+x_0=-3{x_0}^3+x_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2{x_0}^3=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow {x_0}^3=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow x_0=1$$

Συνεπώς $(\varepsilon): y-1^3+1=(3\cdot1^2-1)(x-1)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=2x-2$

**Γ.3.** Έστω $\mathrm{M}(x(t),y(t))$ και η προβολή του στον άξονα $x'x$ είναι $\mathrm{K}(x(t),0)$

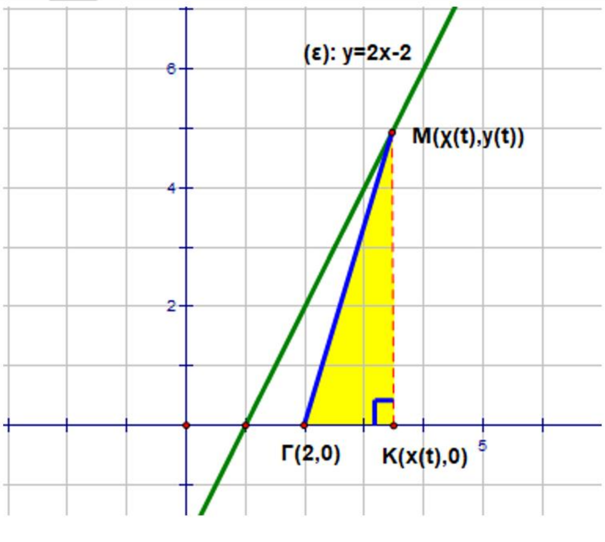
Το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{MK\Gamma}}$ είναι:

$$\mathrm{E}_{\overset{\triangle}{\mathrm{MK\Gamma}}}=\frac{1}{2}|x(t)-2||2x(t)-2|\overset{x(t)>2>1}{=}\frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2)=(x(t)-2)(x(t)-1)=x^2(t)-3x(t)+2$$

Άρα $\mathrm{E}(t)=x^2(t)-3x(t)+2$ και $\mathrm{E}'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$

Την χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$

Άρα $\mathrm{E}'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot3\cdot2-3\cdot2=6$ $^{\tau.\mu.}/_{\sec}$



**Γ.4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|}\le\frac{1}{|f(x)|} \quad \text{άρα} \quad \left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Επομένως $-\dfrac{1}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\dfrac{1}{|f(x)|}$

Για $x<-1$ ισχύει $f(x)=-2x-2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty \quad \text{άρα} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{|f(x)|}\right]=0$

Συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\overset{u=-x}{\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1-(-u)^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ.1.** i) $f'(x)=1-\dfrac{1}{3x}\cdot 3=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$$

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | Ελ. $(1,\ 1-\ln 3)$ | ↗ |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η $f$ παρουσιάζει στο $x=1$ ελάχιστο το $f(1)=1-\ln 3<0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-\ln(3x)\right)=+\infty \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x\to0^+}x=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}\ln(3x)=-\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right] = +\infty$ γιατί $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln(3x)\right]'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x}\cdot 3\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

- Στο διάστημα $(0,1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Άρα $f\left((0,1]\right) = \left[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$ και $0 \in f\left((0,1]\right)$

Άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επειδή $f$ γνησίως φθίνουσα, το $x_1$ είναι μοναδικό.

- Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Άρα $f\left([1,+\infty)\right) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$ και $0 \in f\left(\left[(1,+\infty]\right)\right)$

Άρα υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Επειδή $f$ γνησίως αύξουσα, το $x_2$ είναι μοναδικό.

Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες $x_1, x_2$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x_1 < 1 < x_2$

ii) $f''(x) = \frac{(x-1)'\cdot x - (x-1)\cdot(x)'}{x^2} = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$

Άρα η $f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

**Δ2** $\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx$

Για $x_1 \le x \le 1$ ισχύει ότι $f \searrow$

Άρα $f(x_1) \ge f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Για $1 \le x \le x_2$ ισχύει ότι $f \nearrow$

Άρα $f(x) \le f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Τελικά $f(x) \le 0$ , για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

Άρα $\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2} -f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\ln(3x)-x\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx - \int_{x_1}^{x_2}xdx = \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$

$$= \left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}(x)\left(\ln(3x)\right)'dx - \left(\frac{x_2^{\,2}}{2}-\frac{x_1^{\,2}}{2}\right) = x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_2}^{x_1} x\frac{1}{3x}3dx - \left(\frac{x_2^{\,2}}{2}-\frac{x_1^{\,2}}{2}\right)$$

$$= x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} 1dx - \left(\frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2}\right) = x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - [x]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2}\right).$$

Τα $x_1, x_2$ είναι ρίζες της f. Άρα

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Άρα $\mathrm{E} = x_2x_2 - x_1x_1 - (x_2 - x_1) - \left(\frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2}\right) = x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2} - x_2 + x_1 - \frac{x_2^{\ 2}}{2} + \frac{x_1^{\ 2}}{2}$

$$= \frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2} - x_2 + x_1 = \frac{x_2^{\ 2} - x_1^{\ 2} - 2x_2 + 2x_1}{2} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

**Δ3.** Από το Δ2 έχουμε ότι

$\mathrm{E} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$ αφού $x_2 - x_1 > 0$

Άρα $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - 1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ και $f$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$

**Δ4.**

$2f(x) = (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$

Η εφαπτόμενη της $C_f$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$\varepsilon_1 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η $f$ είναι κυρτή, άρα η $C_f$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_2, f(x_2))$

Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ $(1)$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = x_2$

Η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$

Άρα $f(x) \geq 1 - \ln 3$ $(2)$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$ όμως: $x_2 > 1$

Από $(1)$ και $(2)$ έχουμε με πρόσθεση κατά μέλη

$2f(x) > (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.