ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **Μονάδες 7**

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **Μονάδες 4**

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 3**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν. **Μονάδες 9**

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).
(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $\begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x . **Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο (1, e). **Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$. **Μονάδες 6**

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\cdot e^{-x},\ x\in\mathbb{R} \ \text{και}\ h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1},\ x\in\mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη. **Μονάδες 8**

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x)>\varphi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$, με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ. **Μονάδες 7**

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 135 Σχολ Βιβλίο

Α2. Κριτήριο παρεμβολής σελ. 51 Σχολ. Βιβλίο

Α3. Ορισμοί, σελ. 23 Σχολ. Βιβλίο

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Θέτουμε $u=x+1 \Leftrightarrow x=u-1$

Άρα $f(u)=ue^{-(u-1)}=ue^{1-u}$ $,u\in\mathbb{R}$ οπότε $f(x)=xe^{1-x}, x\in\mathbb{R}$

Β2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	ΟΜ $f(1)=1$	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 με τιμή $f(1)=1$.

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-e^{1-x}-e^{1-x}(1-x)=(x-2)e^{1-x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$, άρα η ευθεία y=0, ($x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$,άρα δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4. i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x}=-\infty$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,1]$ άρα $f((-\infty,1])=(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$ άρα $f((1,+\infty))=(0,1)$

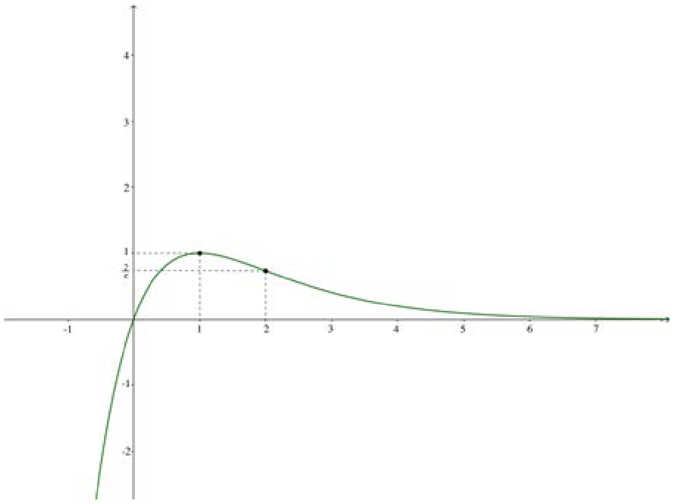
Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,1]$

ii)• Αν $\lambda\in(-\infty,0]$, τότε $\lambda\in f((-\infty,1],$ άρα υπάρχει $x_0\in(-\infty,1]$ ώστε $f(x_0)=\lambda$ και είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας. Ακόμη $\lambda\notin f((1,+\infty))$, άρα δεν έχει λύση στο $(1,+\infty)$ δηλαδή έχει ακριβώς μία λύση.

•Αν $\lambda\in(0,1)$ τότε $\lambda\in f((-\infty,0))$, άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $f(x_1)=\lambda$ και είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας. Ακόμη $\lambda\in f((1,+\infty))$ άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=\lambda$ και είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας. Άρα έχει ακριβώς 2 λύσεις.

•Αν $\lambda=1$ τότε $\lambda\in f((-\infty,1])$ άρα υπάρχει $x_0\in f((-\infty,1])$ ώστε $f(x_0)=\lambda\,(x_0=1)$. Ακόμη $\lambda\notin f((1,+\infty))$,άρα δεν έχει λύση στο $(1,+\infty)$. Οπότε έχει μοναδική λύση το $x_0=1$.

•Αν $\lambda>1$ τότε $\lambda\notin f(\mathbb{R})$ άρα δεν έχει λύση.



Το σχήμα δεν είναι απαραίτητο να γίνει.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 = f(0)$ **,** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ **,** άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^\wedge +} f(x) = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ως πολυωνυμική, και συνεχής στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική ,άρα η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(\alpha x^2 - 3x - 1)}{\cancel{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$**,** άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. . i) Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$

$f(0) = 1,\ f(\frac{3\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$ δηλαδή $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$ άρα δεν ικανοποιεί την τρίτη υπόθεση του θεωρήματος Rolle.

ii) Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$, άρα $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι για x<0 $f'(x) \neq 0$.

Για x<0: $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$. $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (-1) = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$ διότι $\alpha < -3$.

Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

Γ4. Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}),\ f(x) = \sigma\upsilon\nu x \geq -1$.

Για $x \in (-\infty, 0]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα αφού $f'(x) < 0$ και $f(0) = 1$, άρα

$x \leq 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$.

Επομένως $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\kappa(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την κ στο $[1,e]$.

- $\kappa(x)$ συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $\kappa(1)=\ln 1-1=-1<0$

$$\kappa(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1=\frac{e-1}{e}>0$$

Άρα $\kappa(1)\cdot\kappa(e)<0$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0)=0$.

Η κ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\kappa'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η κ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε το x_0 είναι μοναδική ρίζα της κ.

Δηλαδή, υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με: $f'(x)=\ln x_0-\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x}\ (1)$$

Απο ερώτημα **Δ1** έχουμε $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$ (2), οπότε:

$$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=x_0$$

$$f'(x_0)>0\Leftrightarrow \ln x_0>\frac{1}{x}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x_0}>\frac{1}{x}\underset{x_0>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}}x>x_0$$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ με τιμή

$$f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\ln x_0+\cancel{\ln x_0}-\cancel{\ln x_0}-1\overset{(2)}{=}x_0\frac{1}{x_0}-1=0$$

Δ3. Αν $x\le 0$ τότε $g(x)\le 0,\quad h(x)>0$ άρα δεν έχουν κοινό σημείο.

Αν $x>0$ τότε

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\overset{\ln 1-1}{\Leftrightarrow}\ln\left(xe^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\frac{x_0}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-\cancel{x}=(x+1)\ln x_0-\cancel{x}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=\ln x_0(x+1)-\ln x-1\Leftrightarrow 0=f(x)\qquad(3)$$

Από **Δ2**, είναι $f(x)>f(x_0)$, για κάθε $x\in(0,x_0)\cup(x_0,+\infty)$

Ισοδύναμα, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,x_0)\cup(x_0,+\infty)$

Συνεπώς $(3) \Leftrightarrow x = x_0$

Τελικά, οι C_g , C_h έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο $\mathrm{M}\left(x_0, g(x_0)\right)$ ή $\mathrm{M}\left(x_0, h(x_0)\right)$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγισίμων με $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως εκθετική με $h'(x) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\dfrac{x_0}{e}$

Οπότε: $g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\dfrac{x_0}{e} \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right) e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\dfrac{1-x_0}{x_0} \overset{x\in(1,e)}{\Leftrightarrow} e^{-x_0} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\dfrac{1}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0),$$ που ισχύει.

Τελικά, φ , οπότε οι C_g, C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0, g(x_0))$ στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Είναι $\left(AB\right) = \left|f(x) - \varphi(x)\right|$ και $f(x) > \varphi(x)$ για κάθε x>0, οπότε $\left(AB\right) = f(x) - \varphi(x)$, x>0. Θεωρούμε $d(x) = f(x) - \varphi(x),\ x > 0$. Γνωρίζουμε ότι η d(x) παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = x_0$, οπότε $d(x) \geq d(x_0)$, για κάθε x>0.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, τότε και η d είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως διαφορά παραγωγισίμων. Ακόμη, η $d(x)$ παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, οπότε από Θεώρημα Fermat είναι $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \overset{(\Delta 2)}{\Leftrightarrow} \varphi'(x_0) = 0$. Συνεπώς, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της .

Τελικά, σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ
ΦΕΡΓΑΔΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΣΤΡΟΚΑΛΟΣ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ • ΚΩΣΤΑΣ ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ
ΚΩΝ/ΝΑ ΣΤΕΙΑΚΑΚΗ •ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΜΑΚΑΡΩΝΗ