ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ και υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)=0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β, αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται, αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y .

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x΄x . Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα x΄x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. **Μονάδες 5**

Β2. Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 6**

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια
$\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\leq 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\quad \text{με } \lambda>0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$. **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, 1) , η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$. **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f . **Μονάδες 6**

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \le 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\dfrac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$ **Μονάδες 7**

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)\right]$,

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Μονάδες 6**

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ. **Μονάδες 5**

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$. **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. α) Ψ

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.Όμως $f'(x) = 3x^2 \ge 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$.

Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $f \circ g$ ορίζεται στο $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > 1\} = (0, +\infty)$ με τύπο

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Β2. Η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$(fog)'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$, για κάθε $x > 0$. Άρα η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, οπότε είναι 1 – 1 και ορίζεται η αντίστροφή της.

Η $(f \circ g)^{-1}$ ορίζεται στο $(f \circ g)\big((0, +\infty)\big) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty}(f \circ g)(x), \lim\limits_{x \to 0^+}(f \circ g)(x)\right) = (1, +\infty)$ διότι

$$\lim_{x \to 0^+}(fog)(x) = \lim_{x \to 0^+}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty}(fog)(x) = \lim_{x \to +\infty}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty}\frac{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 1 .$$

Επομένως: $(fog)\big((0, +\infty)\big) = (1, +\infty)$

Άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι: $D_{(fog)^{-1}}=(1,+\infty)$. Ακόμη

$$y=(f\circ g)(x)\Leftrightarrow y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow y(e^x-1)=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$. Άρα $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

B3. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων με:

$$\varphi'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)'=\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)'=\frac{-3}{(x-1)(x+2)}<0$$, για $x>1$

Άρα $\varphi\downarrow(1,+\infty)$

B4.

- $$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=l_1$$

Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$. Καθώς $x\to1^+$ είναι $u\to+\infty$. Συνεπώς $l_1=\lim_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=l_2$$

Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$. Καθώς $x\to+\infty$ είναι $u\to1$

Συνεπώς $l_2=\lim_{u\to1}(\ln u)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ συνεπώς: $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

Έχουμε ότι:

- $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$$
- $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu x)=\lambda$$

Άρα, $\lambda=1-\ln\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda=1-\lambda$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln\lambda+\lambda-1$, $\lambda>0$ με $g(1)=0$ και $g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1 – 1. Συνεπώς το $\lambda=1$ είναι μοναδικό.

Γ2. Για $\lambda=1$ ο τύπος της f διαμορφώνεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, x\le0\\[2mm] \eta\mu\, x+\sigma\upsilon\nu x\ ,\ 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\qquad,\quad f(0)=1$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και ότι $f'(0)=1$

Έχουμε ότι

- $$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$$
- $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right]=1$$

Άρα, $f'(0)=1$

Αν $\widehat{\omega}$ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ τότε $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

Γ3. Έχουμε: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & , \ x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu\, x+\eta\mu x & , \ 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ η $f'(x)>0$ άρα η f δεν παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο $(-\infty,0)$.

Η f παραγωγίζεται στο $x_0=0$ με παράγωγο $f'(0)=1$, άρα δεν παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο $x_0=0$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \acute{\eta}\ x=\frac{5\pi}{4}.$$

Άρα τα $x_1=\dfrac{\pi}{4}, x_2=\dfrac{5\pi}{4}$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f .

Γ4. Η εφαπτομένη της f στο σημείο $\mathrm{M}(a, f(a))$, $a\le 0$ είναι:

$$(\varepsilon): y=f'(a)(x-a)+f(a)\Leftrightarrow y=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)+\frac{1}{1-a}$$

Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ άρα

$$y=0\Leftrightarrow \frac{1}{(1-a)^2}(a-x_0)=\frac{1}{1-a}\Leftrightarrow a-x_0=1-a\Leftrightarrow x_0=2a-1$$

Έχουμε ότι $\mathrm{B}(x,0)$ ή $\mathrm{B}(2\alpha-1,0)$ ή $x(t)=2a(t)-1$ και $x'(t)=2a'(t)=-2\dfrac{a(t)}{3}$

Άρα $x'(t_0)=-2\dfrac{a(t_0)}{3}=\dfrac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+2\mathrm{x}-\mathrm{e}$ και $\mathrm{f}''(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+2>0$, για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1.

Ακόμη η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $\mathrm{f}'(0)=1-\mathrm{e}<0$ και $\mathrm{f}'(1)=2>0$

Συνεπώς $\mathrm{f}'(0)\mathrm{f}'(1)<0$, οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathrm{x}_0\in(0,1)$ ώστε $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)=0$. Όμως η f' είναι 1-1, άρα το x_0 είναι μοναδικό. Ακόμη έχουμε $\mathrm{x}>\mathrm{x}_0\overset{\mathrm{f}'\nearrow\mathrm{R}}{\Rightarrow}\mathrm{f}'(\mathrm{x})>\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)\Rightarrow\mathrm{f}'(\mathrm{x})>0$ και

$\mathrm{x}<\mathrm{x}_0\overset{\mathrm{f}'\nearrow\mathrm{R}}{\Rightarrow}\mathrm{f}'(\mathrm{x})<\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)\Rightarrow\mathrm{f}'(\mathrm{x})<0$

Η f συνεχής στο x_0 , άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\mathrm{x}_0\in(0,1)$.

Επιπλέον $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)=0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}=\mathrm{e}-2\mathrm{x}_0$ (1)

Όμως $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)=\mathrm{e}-2\mathrm{x}_0+\mathrm{x}_0{}^2-\mathrm{e}\mathrm{x}_0-1\overset{(1)}{=}\mathrm{x}_0{}^2-(\mathrm{e}+2)\mathrm{x}_0+\mathrm{e}-1$

Δ2. Θεωρούμε $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\dfrac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}, \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0$. Από το Δ1 είναι $\mathrm{f}(\mathrm{x})>\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\Leftrightarrow\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)>0$ για κάθε $\mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0$ και $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)\right)=\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)=0$,αφού η f είναι συνεχής στο x_0 .

Άρα $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\dfrac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\mathrm{h}(\mathrm{x})=+\infty$

Ακόμη, για κάθε $\mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0$ έχουμε:

$-1\le\eta\mu\dfrac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}\le 1\Leftrightarrow\mathrm{h}(\mathrm{x})-1\le\mathrm{h}(\mathrm{x})+\eta\mu\dfrac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}\le\mathrm{h}(\mathrm{x})+1$

και $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}(\mathrm{h}(\mathrm{x})-1)=\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}(\mathrm{h}(\mathrm{x})+1)=+\infty$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right)=+\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0,\ x\in[x_0,1]$ που είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, με $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$ και

$g(x_0)=f(x_0)<0$ διότι $x_0<1 \overset{f\nearrow[x_0,+\infty)}{\Rightarrow} f(x_0)<f(1)\Rightarrow f(x_0)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1)$ ώστε, $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0,1)$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $g'(x)=f'(x)+1>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$.

Άρα g είναι γνησιώς αύξουσα στο $[x_0,1]$ οπότε το ρ είναι μοναδικό.

Δ4. $f(x_0)>f(\rho)\left(f'(k)+1\right)\Leftrightarrow f(x_0)>(x_0-\rho)\left(f'(k)+1\right)\Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{(x_0-\rho)}<f'(k)+1$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{(x_0-\rho)}-1<f'(k)\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-(x_0-\rho)}{(x_0-\rho)}<f'(k)\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{(x_0-\rho)}<f'(k)$$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ), άρα από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ ώστε, $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$.

Όμως, $x_0<\xi<\rho<\kappa<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)$, για κάθε $\kappa\in(\rho,1)$.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΜΑΘΙΟΥΔΑΚΗ • ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΜΑΚΑΡΩΝΗ