

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

- α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ; (Μονάδες 2)
β) i. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)
ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ; (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

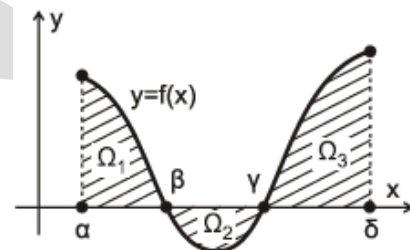
- α)** Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .
 (Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
 Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)
β) Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .
 (Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
 Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

A5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 , Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$, τότε το $\int_a^{\delta} f(x) dx$ είναι ίσο με:

- α)** 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (Μονάδες 3)
B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$ (Μονάδες 7)
B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της (μονάδες 4). (Μονάδες 6)
B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

- Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική. (Μονάδες 4)
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$. (Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\hat{M}OK$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. α) Σχολικό βιβλίο, σελ. 15
β) i Σχολικό βιβλίο, σελ. 35
ii Σχολικό βιβλίο, σελ. 35-36

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

A4. α) Λάθος
Το θεώρημα ισχύει για διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων
β) Λάθος
Μόνο όταν είναι συνεχής είναι ίσο με την τιμή $f(x_0)$.

A5. γ)

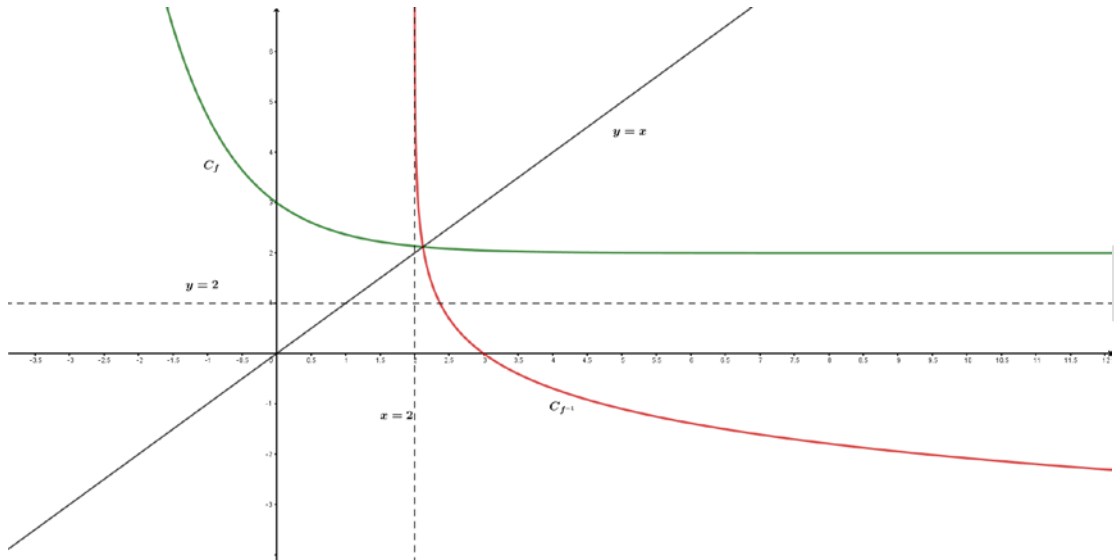
ΘΕΜΑ Β

B1. Η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \lambda \right) = \lambda$ άρα $\lambda = 2$

B2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ ή $g(x) = e^{-x} + 2 - x$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η f συνεχής στο $[2, 3]$ με $g(2) = e^{-2} > 0$ και $g(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$. Από Θ. Bolzano. υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

B3. Έχουμε $f(x) = e^{-x} + 2$ με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και "1-1" τότε η $f \downarrow$ στο $A = (-\infty, +\infty)$ άρα $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty$ άρα $f(A) = A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$
 $y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \stackrel{y > 2}{\Leftrightarrow} \ln(y - 2) = \ln e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$ άρα
 $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x > 2$

B4. Έχουμε $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x > 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty$. Άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής, άρα είναι συνεχής στο 1, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = \beta + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = \alpha + 1 = f(1)$$

Επομένως $\alpha + 1 = \beta + 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, επομένως, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - \alpha - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - \beta - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta) = \beta + 1$$

Άρα $\beta + 1 = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$, οπότε και $\alpha = 1$.

Γ2. Για $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ και για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} + x) = +\infty$$

Γ3. i) Για $x \geq 1$: $f(x) = x^2 + 1 > 0$ άρα η f δεν έχει ρίζες στο $[1, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$.

$$f(-1) = e^{-2} - 1 = \frac{1}{e^2} - 1 < 0 \text{ και } f(0) = e^{-1} > 0.$$

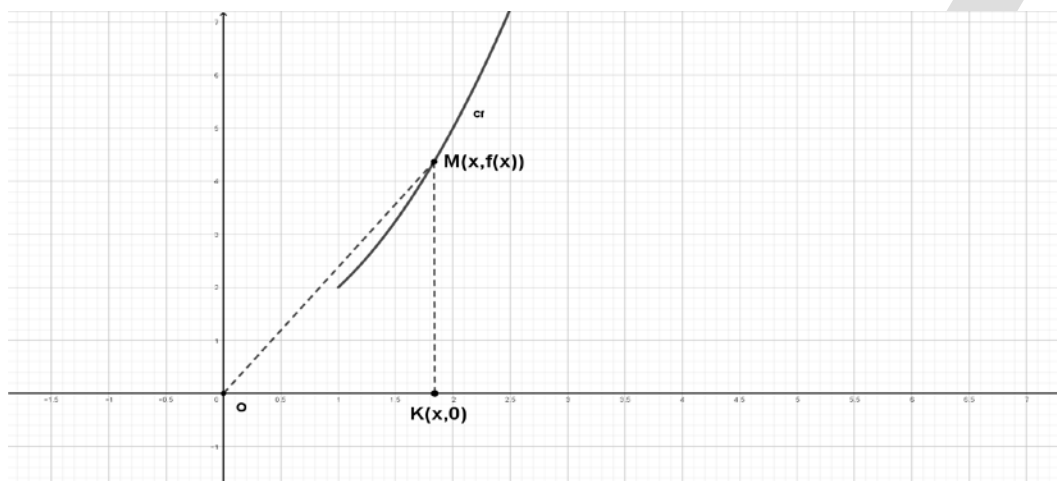
Άρα $f(-1)f(0) < 0$. Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ii) Για $x > x_0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f^2(x) > 0$

$$x_0 < 0 \Leftrightarrow -x_0 > 0 \Leftrightarrow -x_0 f(x) > 0$$

Άρα $f^2(x) - x_0 f(x) > 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4.



$$E = \frac{1}{2}(OK)(KM) = \frac{1}{2}x \cdot f(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x^2 + 1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

Άρα $E(t) = \frac{1}{2}x^3(t) + \frac{1}{2}x(t)$. Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $E'(t) = \frac{3}{2}x^2(t)x'(t) + \frac{1}{2}x'(t)$.

$$\text{Τη στιγμή } t_0 : E'(t_0) = \frac{3}{2}x^2(t_0)x'(t_0) + \frac{1}{2}x'(t_0) = \frac{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 27 + 1 = 28 \tau. \mu / \text{sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$. Η $y = -x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ άρα $f(1) = 1$ και $f'(1) = -1$. Έχουμε $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$ και $f'(1) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$, οπότε $\beta = 2$.

Δ2. Έχουμε $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$. Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - (-x + 2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)$. Για $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$ και $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq \ln 1 = 0$. Άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$.

Θέτουμε $x^2 - 2x + 2 = u \Rightarrow 2(x-1)dx = du \Rightarrow (x-1)dx = \frac{1}{2}du$ για $x=1$, $u=1$ και για $x=2$, $u=2$ άρα

$$E = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \left[\frac{1}{2} u \ln u \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} 2 \ln 2 - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} (2-1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \tau. \mu$$

Δ3. i Είναι $f'(x) = ((x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2)' = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$ και

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε, $f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$ που ισχύει αφού στο Δ2 δείξαμε

$\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ και είναι $\frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

ii Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι, $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$$

Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ άρα υπάρχει

$$\theta \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f'(\theta) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} \geq -1 \quad \text{που ισχύει από } \Delta 3(i).$$

Δ4. Έστω $M(x_1, f(x_1))$ και $N(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g τότε πρέπει:

$f'(x_1) = g'(x_2)$. Όμως $f'(x_1) \geq -1$ με το $=$ να ισχύει μόνο για $x_1 = 1$ και $g'(x_2) = 3x_2^2 - 1 \leq 1$ με το $=$ να ισχύει μόνο για $x_2 = 0$. Άρα είναι $M(1, f(1))$ και $N(0, g(0))$ μοναδικά σημεία αφού οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$, άρα η κοινή εφαπτομένη τους είναι: $\varepsilon: y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$ ή $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ
ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΜΑΘΙΟΥΔΑΚΗ • ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΜΑΚΑΡΩΝΗ