ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}, \quad x\in[0,2]$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα στο [0, 2] και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να δείξετε ότι $\forall x\in[0,2]$ η f αντιστρέφεται και θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx=1$.

iii. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx \le \ln\dfrac{5}{4}$.

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+4\right)-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{2x^2+8-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-2x^2+8}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -2\left(x^2-4\right)>0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x\in(-2,2)$

Τότε

x	**0**		**2**
f΄		+	
f		↗	

Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο [0, 2] με f(0) = 0 ελάχιστο και $f(2)=\dfrac{1}{2}$ μέγιστο.

Αν Δ = [0, 2] τότε το σύνολο τιμών είναι το $f(\Delta)=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

ii. Από **i** $\forall x\in[0,2]$ η f είναι γνήσια αύξουσα άρα και "1 – 1" στο Δ = [0, 2] επομένως η f αντιστρέφεται.

Έστω $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow f(u)=x$ με $f'(u)du=dx$

Αν $x=0 \Leftrightarrow f(u)=0 \Leftrightarrow f(u)=f(0) \overset{"1-1"}{\Leftrightarrow} u=0$

Αν $x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(u)=f(2) \overset{"1-1"}{\Leftrightarrow} u=2$.

Τότε $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 uf'(u)du=\int_0^2 f(x)dx+\left[uf(u)\right]_0^2-\int_0^2 (u)'f(u)du=$

$=\int_0^2 f(x)dx+2f(2)-\int_0^2 f(x)dx=2\dfrac{1}{2}=1$.

iii. Έχουμε $f(x)\eta\mu x=\dfrac{2x\eta\mu x}{x^2+4}$

$\left|f(x)\eta\mu x\right|=\left|\dfrac{2x\eta\mu x}{x^2+4}\right|=\dfrac{|2x||\eta\mu x|}{\left|x^2+4\right|}\le\dfrac{|2x|}{\left|x^2+4\right|}=\dfrac{2x}{x^2+4} \quad \forall x\in[0,2]$. Άρα:

$\left|f(x)\eta\mu x\right|\le\dfrac{2x}{x^2+4} \Leftrightarrow -\dfrac{2x}{x^2+4}\le f(x)\eta\mu x\le\dfrac{2x}{x^2+4}$.

Επομένως $f(x)\eta\mu x\le\dfrac{2x}{x^2+4} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+4}-f(x)\eta\mu x\ge 0$.

Άρα $\int_0^1\left(\dfrac{2x}{x^2+4}-f(x)\eta\mu x\right)dx\ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1\dfrac{2x}{x^2+4}dx-\int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx\ge 0 \Leftrightarrow$

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx \le \int_0^1 \frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx \le \left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx \le \ln 5 - \ln 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\eta\mu x\,dx \le \ln\frac{5}{4}.$$

Α Σ Κ Η Σ Η 2

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2} = 3$ και f(3) = 4

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_o = 2$

ii. Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(x)-5x+6 \ge 0$

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\zeta \in (2,3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Λ Υ Σ Η

i. Αν $\frac{f(x)-2x}{x-2} = g(x) \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} f(x)-2x = (x-2)g(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-2)g(x)+2x$ ¬

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)g(x)+2x\right] = 0\cdot 3 + 4 = 4$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

Τότε $\forall x \neq 2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)g(x)+2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)g(x)}{x-2} + \frac{2(x-2)}{x-2}\right] = \lim_{x\to 2}\left(g(x)+2\right) = 5 = f'(2).$$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο $x_0 = 2$ είναι

ε : y = f΄(2) · (x – 2) + f(2) = 5(x – 2) + 4 = 5x – 10 + 4 = 5x – 6.

ii. Επειδή η f είναι κυρτή και ε : y = 5x – 6 είναι εφαπτομένη της c_f στο $x_0 = 2$ ισχύει ότι:

$f(x) \ge 5x-6 \Leftrightarrow f(x)-5x+6 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

iii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο [2, 3] με f(2) = 4 και f(3) = 4.

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\zeta \in (2,3)$ τέτοιο ώστε f΄(ζ) = 0. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο [2, 3].

Επομένως το $\zeta \in (2,3)$ είναι μοναδικό.

Τότε $\forall x \in (2,\zeta)$ έχουμε: x < ζ άρα f΄(x) < f΄(ζ) ⇔ f΄(x) < 0

και $\forall x \in (\zeta,3)$ έχουμε: x > ζ άρα f΄(x) > f΄(ζ) ⇔ f΄(x) > 0

Δηλαδή:

x	2		ζ		3
f΄		−	0	+	
f		↘		↗	

Άρα το f(ζ) μοναδικό ελάχιστο της f στο (2, 3).

<u>**ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ
ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ • ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ