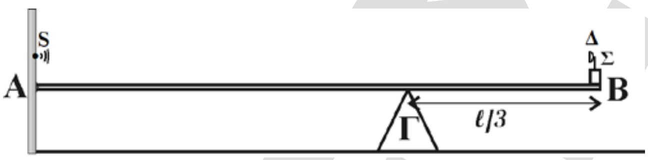
ΑΣΚΗΣΗ



Μία λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ μάζας M = 6 kg και μήκους ℓ = 3 m ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Το άκρο της Α είναι στερεωμένο με άρθρωση σε ακλόνητο λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ σε σημείο Γ της ράβδου το οποίο απέχει απόσταση $\frac{\ell}{3}$ από το άκρο Β της είναι τοποθετημένο υποστήριγμα. Πάνω στη ράβδο, στο άκρο Β, βρίσκεται ακίνητο πολύ μικρό σώμα Σ μάζας m = 1 kg. Στον κατακόρυφο τοίχο πάνω από το άκρο Α της ράβδου, υπάρχει ακίνητη ηχητική πηγή S που εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας f_S = 680 Hz. Πάνω στο σώμα Σ έχει τοποθετηθεί αβαρής σημειακός δέκτης Δ ηχητικών κυμάτων, ο οποίος βρίσκεται στην ίδια οριζόντια διεύθυνση με την πηγή S.

Α. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση και από το υποστήριγμα.

Β. Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 δίνουμε στο σώμα Σ οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 4 m/s προς το άκρο Α, οπότε το Σ αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο. Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος Σ και ράβδου μ = 0,2.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ τη στιγμή που φτάνει στο άκρο Α της ράβδου.

β. Να βρείτε πώς μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα σε συνάρτηση με την απόσταση x που διανύει το σώμα Σ από το άκρο Β της ράβδου, έως ότου φτάσει στο άκρο Α. Να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Γ. Το σώμα Σ συγκρούεται ελαστικά με τον λείο κατακόρυφο τοίχο.

α. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση;

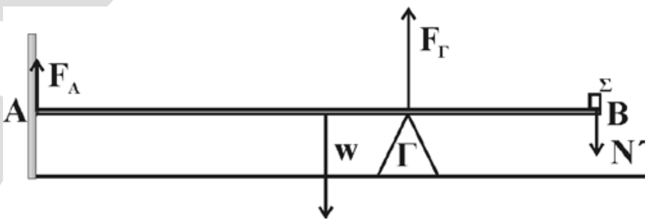
β. Θα παραμείνει τελικά το σώμα πάνω στη ράβδο μετά την κρούση ή θα την εγκαταλείψει; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να υπολογίσετε το πλήθος $N_Α$ των ηχητικών κυμάτων που καταγράφει ο δέκτης Δ, από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 έως τη στιγμή t_1 = 3 s.

Να θεωρήσετε:
- ότι κατά την κρούση το σώμα δεν παραμορφώνεται.
- ότι μεταξύ ράβδου και υποστηρίγματος δεν υπάρχουν τριβές.
- αμελητέα την αντίσταση του αέρα και το χρόνο κρούσης.
- ότι ο ηχητικός δέκτης δεν καταστρέφεται κατά την κρούση.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $υ_{ηχ}$ = 340 m/s και g = 10 m/s^2.

ΛΥΣΗ



Α. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η ράβδος ισορροπεί υπό την επίδραση των εξής δυνάμεων:
Του βάρους της w = Mg, της κατακόρυφης δύναμης $F_Γ$ που δέχεται από το υποστήριγμα με φορά προς τα πάνω, της κατακόρυφης δύναμης $F_Α$ που δέχεται από την άρθρωση με φορά προς τα πάνω και της κατακόρυφης δύναμης N΄ που δέχεται λόγω επαφής από το σώμα Σ με φορά προς τα κάτω.

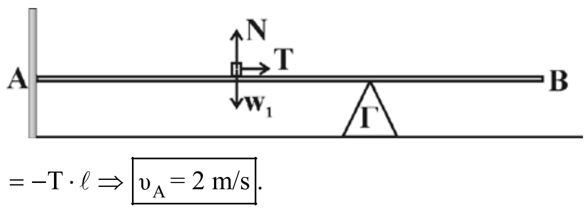
Το σώμα Σ δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος του w_1 = mg και τη κατακόρυφη δύναμη N από τη ράβδο λόγω επαφής. Οι δυνάμεις N και N΄ έχουν ίσα μέτρα ως δράση-αντίδραση (3^{ος} νόμος Newton).

Για την ισορροπία του σώματος Σ ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = N \Rightarrow N = 10\text{ N}$. Οπότε $N' = 10\text{ N}$.

Η απόσταση (ΑΓ) ισούται με $(ΑΓ) = \ell - \frac{\ell}{3} \Rightarrow (ΑΓ) = 2\text{ m}$.

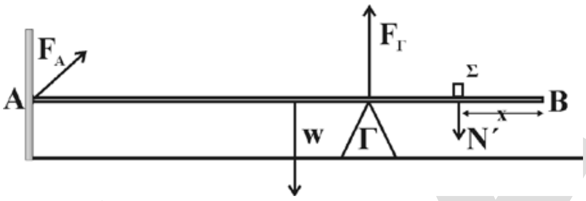
Για τη στροφική ισορροπία της ράβδου ΑΒ ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και με θετική φορά περιστροφής την αντιωρολόγια, ισχύει: $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -Mg\frac{\ell}{2} - N'\ell + F_Γ(ΑΓ) = 0 \Rightarrow \boxed{F_Γ = 60\text{ N}}$.

Για τη μεταφορική ισορροπία της ράβδου ΑΒ ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg + N' = F_Α + F_Γ \Rightarrow \boxed{F_Α = 10\text{ N}}$.



Β. α. Στον άξονα κίνησής του, το σώμα Σ δέχεται μόνο την τριβή ολίσθησης $T = \mu N \Rightarrow T = 2\text{ N}$, από τη ράβδο.
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας για το σώμα Σ, από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε από το άκρο Β έως τη στιγμή που φτάνει στο άκρο Α, έχουμε: $K_A - K_B = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_A^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -T\cdot\ell \Rightarrow \boxed{υ_A = 2\text{ m/s}}$.

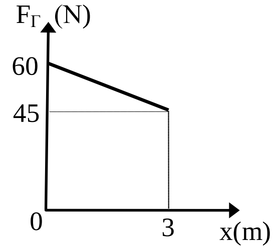
β. Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή όπου το σώμα Σ έχει διανύσει απόσταση x από το άκρο Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα εξακολουθεί να ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα, επομένως $N' = 10$ N.



Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας για την περιστροφή της ράβδου έχουμε:

$$Στ_{(A)} = 0 \Rightarrow -Mg\frac{\ell}{2} - N'(\ell - x) + F_Γ(AΓ) = 0 \Rightarrow \boxed{F_Γ = 60 - 5x \text{ (S.I.)}}.$$

Στη σχέση αυτή η τιμή του x κυμαίνεται μεταξύ του $x = 0$ και $x = \ell = 3$ m.
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση.
Με αντικατάσταση των ακραίων τιμών για το x, προκύπτει αντίστοιχα ότι για $x = 0$ είναι $F_Γ = 60$ N και για $x = 3$ m, είναι $F_Γ = 45$ N.
Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ. α. Σύμφωνα με τη θεωρία του σχολικού βιβλίου όταν ένα σώμα πολύ μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια ενός τοίχου (πολύ μεγαλύτερης μάζας), ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς επομένως $υ'_A = -υ_A \Rightarrow \boxed{υ'_A = -2 \text{ m/s}}$.

β. Για να παραμείνει το σώμα Σ πάνω στη ράβδο μετά την κρούση, θα πρέπει η ταχύτητά του να έχει μηδενιστεί το πολύ μέχρι να φτάσει στο άκρο Β, δηλαδή να έχει διανύσει απόσταση το πολύ ίση με το μήκος ℓ της ράβδου. Η κίνηση του σώματος κατά την επιστροφή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, αφού πάλι στον άξονα της κίνησης η μόνη δύναμη που δέχεται είναι η τριβή ολίσθησης, η οποία βέβαια τώρα έχει φορά προς το σημείο Α. Έστω λοιπόν ότι το σώμα θα διένυε πάνω στη ράβδο απόσταση x_1 έως ότου σταματήσει. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας για την κίνηση του σώματος Σ από το άκρο Α έως το σημείο που θα σταματούσε έχουμε:

$$K_{τελ} - K_A = ΣW \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_A^2 = -T \cdot x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1 \text{ m}}.$$

Αφού $x_1 < \ell$, το σώμα Σ δεν θα εγκαταλείψει τη ράβδο.

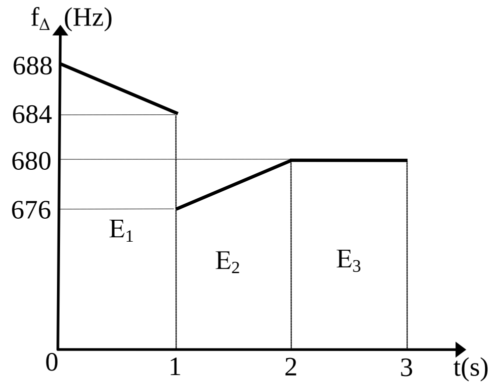
γ. Η κίνηση του σώματος Σ από το άκρο Β προς το άκρο Α είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, με επιβράδυνση μέτρου $α = \frac{ΣF}{m} \Rightarrow α = \frac{T}{m} \Rightarrow α = 2 \text{ m/s}^2$.
Η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ για την παραπάνω κίνηση είναι:
$υ_Σ = υ_0 - α\cdot t \Rightarrow υ_Σ = 4 - 2\cdot t$ (S.I) με $0 \le t \le 1$ s αφού για $t = 1$ s ισχύει $υ_Σ = υ_A = 2$ m/s.
Η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης Δ είναι:

$$f_Δ = \frac{υ_{ηχ} + υ_Σ}{υ_{ηχ}} f_S \Rightarrow f_Δ = \frac{340 + (4 - 2\cdot t)}{340} 680 \Rightarrow f_Δ = 688 - 4\cdot t \text{ (S.I.)} \text{ με } 0 \le t \le 1 \text{ s.}$$

Η κίνηση του σώματος Σ κατά την επιστροφή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, με επιβράδυνση ίδιου μέτρου $α = 2$ m/s^2 και αρχική ταχύτητα την $υ_A = 2$ m/s.
Η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος Σ για την κίνηση αυτή είναι (κατά μέτρο):
$υ_Σ' = υ_A - α\cdot(t - 1) \Rightarrow υ_Σ' = 4 - 2\cdot t$ (S.I) με $1 \text{ s} \le t \le 2$ s αφού για $t = 2$ s το σώμα Σ ακινητοποιείται ($υ_Σ = 0$).
Η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης Δ είναι:

$$f_Δ = \frac{υ_{ηχ} - υ'_Σ}{υ_{ηχ}} f_S \Rightarrow f_Δ = \frac{340 - (4 - 2\cdot t)}{340} 680 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Δ = 672 + 4\cdot t \text{ (S.I.)} \text{ με } 1 \text{ s} \le t \le 2 \text{ s.}$$



Για $t \ge 2$ s ο δέκτης Δ καταγράφει την πραγματική συχνότητα του ήχου $f_Δ = f_S = 680$ Hz, αφού δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ πηγής S και δέκτη Δ.
Στο διπλανό διάγραμμα απεικονίζεται η μεταβολή της συχνότητας $f_Δ$ σε συνάρτηση με το χρόνο t, για $0 \le t \le 3$ s.
Το πλήθος N_A των ηχητικών κυμάτων που καταγράφει ο δέκτης Δ, για $0 \le t \le 3$ s είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του διαγράμματος σε άξονες $f_Δ - t$.
Οπότε $N_A = E_1 + E_2 + E_3 \Rightarrow \boxed{N_A = 2044}$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΚΑΡΑΪΣΚΟΥ ΑΝΝΑ • ΚΛΗΜΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ
ΜΕΛΕΣΣΑΝΑΚΗ ΕΦΗ • ΜΟΥΡΤΖΑΝΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ
ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ • ΤΣΙΠΡΑΣ ΑΡΗΣ